I ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
ФАКУЛЬТЕТ БІОМЕДИЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

2017 р.

Перший курс

1. Функцію $f(x)$ задано на усій числовій осі так, що $f(x)=10x,$ коли $x\in[0;10)$. Відомо, що $f(x+10)=\frac{1}{10}f(x)$ для $\forall x\in R$.

Обчисліть $\int\limits_{16}^{17} f(x)dx$?

2. Знайдіть найменшу відстань між кривими $y=x^2+4$ і $y=\sqrt{x-4}$.

3. Доведіть, що для $\forall x\geq 0$ виконується нерівність $\sin x\geq x-\frac{x^3}{6}$.

4. Знайдіть радіус кола, що проходить через точку $M(-4;0)$ і дотикається кіл $x^2+20x+y^2-12y+100=0$ і $x^2+20x+y^2+12y+100=0$.

5. Функцію $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ задано формулою $f(x)=\begin{cases}1 \textit{ при } x=0,\\ x \textit{ при } x\in(0;1),\\ 0 \textit{ при } x=1.\end{cases}$

Чи існує така функція $g:[0;1]\to[0;1]$, що $g(g(x))=f(x)$ для всіх x? Якщо так, наведіть приклад такої функції; якщо ні – доведіть це.

6. Назвемо набір з нулів та одиниць *правильним*, якщо в ньому кожна група з послідовних нулів має парну довжину, а кожна група з послідовних одиниць – непарну. Наприклад, набори 001000011100 та 111110010000 є правильними, а набір 111001111101– неправильним. Скільки існує правильних наборів довжини 17?

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.

Деталі на http://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua

I ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
ФАКУЛЬТЕТ БІОМЕДИЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

2017 р.

Старші курси

1. Функцію $f(x)$ задано на усій числовій осі так, що $f(x)=10x$, коли $x\in[0;10)$. Відомо, що $f(x+10)=\frac{1}{10}f(x)$ для $\forall x\in R$.

Обчисліть $\int\limits_{16}^{17} f(x)dx$?

2. Знайдіть найменшу відстань між кривими $y=x^2+4$ і $y=\sqrt{x-4}$.

3. Доведіть, що для $\forall x\geq 0$ виконується нерівність $\sin x\geq x-\frac{x^3}{6}$.

4. Дослідіть збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2017+\ln(n^n)}$

5. Для яких $\alpha\in\mathbb{R}$ існує така неперервна функція $g:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$, що $g(g(x))=x^{\alpha}$ для всіх x? Відповідь обґрунтуйте (наведіть приклад такої функції для тих значень α, для яких це можливо, та доведіть її неіснування у протилежному випадку).

6. Безсмертна Маша записує на нескінченній дошціцифри з множини $0,1,\ldots,9$, обираючи кожну наступну цифру навмання незалежно від попередніх. Маша припиняє цей процес в той момент, коли число утворене з *усіх* написаних на дошці цифр стає повним квадратом. (Наприклад, Маша зупиняється, написавши 3837681, оскільки $3837681=1959\times1959$). Позначимо через p ймовірність того, що Маша буде писати цифри вічно. Доведіть, що $p>\frac{1}{2}$.

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на http://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/
Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua